数理解析研究所講究録
第 885 巻 1994 年 154-162

条件付ユニタリー過程の数学的理論の検討

(大矢-Accaridi理論の応用の可能性)

玉川大　量子通信研究施設　　　広田　修(Osamu Hirota)

1。まえがき

光通信の発展過程においてその技術的諸問題は物理及び数学に大きな課題を提供してきた。光通信技術はもはや古典物理学で予想される性能の限界に近ずきつつある。次世代の通信科学を創造するためには新しい原理の発見が必要である。筆者らが提唱している”条件付ユニタリー過程”［１、２］は従来の基本原理にない全く新しい通信原理である。数々の物理現象の例［３、４、５］が報告されつつある中でその数理的体系化を図る事は極めて重要であろう。このため大矢グループとの共同研究は必要不可欠と考える。この小論で我々の考えを明記し、大矢-Accardi理論［６、７］との接点を探りたい。

２．条件付ユニタリー作用素の概念的定義

文献１において初めて条件付ユニタリー過程の概念が提案され、その重要性が論じられた。以下にこの条件付ユニタリー過程を記述するための作用素の定義を改めて示す。ここであるパラメーターによってインデックスされた量子状態の集合$\{|\psi_j\rangle\}$がここで極めて重要な役割を果たす。これらのパラメーターは一般に物理量の量子期待値と考えられるものである。

定義１　量子状態のインデックスを表す条件付パラメーターを{j}とする。この{j}をサスセプターとする次の条件を満足する作用素の族を条件付ユニタリー作用素と定義する。

$$\begin{aligned}
&T^{\dagger}(j)T(j) = T(j)T^{\dagger}(j) = I \quad (\forall j),\\
&<\psi_j|T^{\dagger}(j)T(k)|\psi_k> = \{<\psi_j|T^{\dagger}(j)\}\{T(k)|\psi_k>\} \\
&\qquad\qquad \neq <\psi_j|\psi_k> \quad (j \neq k).
\end{aligned} \tag{1}$$

この概念は初期状態に依存するダイナミックスを持つチャンネルを構築するために導入されたものである。すなわちそのダイナミックスはユニタリー作用素の族に支配される。もし、$|\psi_j\rangle$が初期状態として用意されるとき、$T(j)$ はユニタリー時間発展作用素として、$|\psi_j\rangle$ に働く。このようなチャンネルを条件付ユニタリー過程と呼ぶ。

このように、条件付ユニタリー作用素が存在すればシステムの入力における相異なる量子状態の内積に対し、出力の内積の変化過程が作用素によって表現されることになる。ここで内積の変化に対し次のようにクラス化できる。

（a）正の条件付ユニタリー過程：内積が増加

（b）負の条件付ユニタリー過程：内積が減少

3．条件付ユニタリー過程とその記述法

3．1．基本的定義

一般に我々が興味ある過程はエネルギー減衰過程を含む非ユニタリー過程である。物理過程が非ユニタリーであっても一般に拡張空間上でそれに対応するユニタリー表現が存在する。

ここで、信号モードの Hilbert 空間H_sを信号空間と呼びと記し、外部モードの Hilbert 空間H_vをとすれば、拡張空間 H_{ex} は両空間のテンソル積で構成される：

$$H_{ex} = H_s \otimes H_v. \tag{2}$$

定義２　チャンネルとは拡張空間から拡張空間への写像である。

ここで拡張空間から同じ拡張空間へのユニタリー変換（作用素）が存在するものと仮定しよう。

$$\begin{aligned} &U: H_{ex} \to H_{ex}, \\ &U^\dagger U = UU^\dagger = I. \end{aligned} \tag{3}$$

このユニタリー作用素は量子状態変換過程としてのチャンネルを表す。

このユニタリティは具体的な物理過程を考察する上で本質的な要求である。

定義３（情報信号空間の定義）

情報源シンボルの集合を $\{j\} \in J$ としよう。情報源 シンボルは量子状態のあるパラメーターに１対１対応させられるとき、その量子状態の集合を情報信号空間H_{sb}とする。

ここで、情報信号空間はH_sの部分空間であり、情報信号空間と外部モードの空間とのテンソル積空間は具体的な通信路モデルにおけるそのチャンネルに対する入力の量子状態の集合を表す空間となる。

次に信号量子状態のパラメーターが、あるシフト作用素によって次のように表されるとき、条件付ユニタリー作用素をシステマチックに導出しうることを示したい。

定義４　入力となる信号及び外部モードの量子状態が次のように表されるものとする。

$$|\psi_{in}(\beta)>_s = D^{(s)}(\beta)|0>_s, \tag{4}$$

$$|\phi_{in}(\gamma)>_v = D^{(v)}(\gamma)|0>_v. \tag{5}$$

この　$D^{(s)}, D^{(v)}$　はシフト作用素であり、β, γをサスセプターと呼ぶ。

定義５　サスセプターに信号シンボルが対応させられてい る情報信号空間を条件付情報信号空間と呼ぶ。

拡張空間上での出力状態をρ_{out}としよう。このとき、この出力状態の外部モードに関する部分トレースは出力の信号モードの量子状態を与える。その結果、考察下のチャンネルの入力信号モードと出力信号モード間の関係が与えられる。

$$|\psi_{in}(\beta)>_s<\psi_{in}(\beta)| \to \mathop{\mathrm{Tr}}_{v} \rho_{out}. \tag{6}$$

定義６　上記の入出力関係を信号モードチャンネルと定義する。

このチャンネルが我々が実際に制御、設計及び測定することのできる理論的対象システムである。

３．２．条件付ユニタリー作用素

ここで我々は信号モードチャンネルが条件付ユニタリー過程であることを示し、その記述法として条件付ユニタリー作用素を導出する。信号モードチャンネルを表す作用素は出力状態の外部モードに関する部分トレースを用いて次のように与えられる。

$$\begin{aligned} &\mathop{\mathrm{Tr}}_{v} |\psi_{out}>_{s\otimes v}<\psi_{out}| \\ &= \mathop{\mathrm{Tr}}_{v} U\, |\psi_{in}>_s|\phi_{in}>_v<\phi_{in}|_s<\psi_{in}|U^{\dagger} \\ &\equiv T\, |\psi_{in}>_s<\psi_{in}|T^{\dagger}. \end{aligned} \tag{7}$$

補題1
条件付情報信号空間を入力とする信号モードチャンネルは条件付ユニタリー過程となる。

証明
全空間で定義されるユニタリー作用素をUとする。
一般に相互作用表現において入出力の量子状態は

$$
\begin{aligned}
|\psi_{\mathrm{out}}>_{\mathrm{s}\otimes\mathrm{v}} &= U\,|\psi_{\mathrm{in}}(\beta)>_{\mathrm{s}}|\phi_{\mathrm{in}}(\gamma)>_{\mathrm{v}} \\
&= U\,D^{(\mathrm{s})}(\beta)|0>_{\mathrm{s}}D^{(\mathrm{v})}(\gamma)|0>_{\mathrm{v}} \\
&= U\,D^{(\mathrm{s})}(\beta)U^{\dagger}U\,D^{(\mathrm{v})}(\gamma)U^{\dagger}U\,|0>_{\mathrm{s}}|0>_{\mathrm{v}} \\
&= \widetilde{D}^{(\mathrm{s})}(\beta)\,\widetilde{D}^{(\mathrm{v})}(\gamma)U\,|0>_{\mathrm{s}}|0>_{\mathrm{v}} \\
&= \widetilde{D}^{(\mathrm{s})}(\beta)\,\widetilde{D}^{(\mathrm{v})}(\gamma)U\,D^{(\mathrm{s})}(-\beta)|\psi_{\mathrm{in}}(\beta)>_{\mathrm{s}}|0>_{\mathrm{v}}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

ここでもし

$$U\,|0>_{\mathrm{s}}|0>_{\mathrm{v}} = |0>_{\mathrm{s}}|0>_{\mathrm{v}}. \tag{9}$$

であれば

$$|\psi_{\mathrm{out}}>_{\mathrm{s}\otimes\mathrm{v}} = \widetilde{D}^{(\mathrm{s})}(\beta)\,\widetilde{D}^{(\mathrm{v})}(\gamma)D^{(\mathrm{s})}(-\beta)|\psi_{\mathrm{in}}(\beta)>_{\mathrm{s}}|0>_{\mathrm{v}}. \tag{10}$$

ただし

$$
\begin{aligned}
\widetilde{D}^{(\mathrm{s})}(\beta) &= U\;D^{(\mathrm{s})}(\beta)U^{\dagger}, \\
\widetilde{D}^{(\mathrm{v})}(\gamma) &= U\;D^{(\mathrm{v})}(\gamma)U^{\dagger}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

次に上の計算において

$$\widetilde{U} = \widetilde{D}^{(\mathrm{s})}(\beta)\,\widetilde{D}^{(\mathrm{v})}(\gamma)\;U\,D^{(\mathrm{s})}(-\beta). \tag{12}$$

あるいは

$$\widetilde{U} = \widetilde{D}^{(\mathrm{s})}(\beta)\,\widetilde{D}^{(\mathrm{v})}(\gamma)\;D^{(\mathrm{s})}(-\beta). \tag{13}$$

とおけば、出力状態は

$$|\psi_{\mathrm{out}}>_{\mathrm{s}\otimes\mathrm{v}} = \widetilde{U}\,|\psi_{\mathrm{in}}(\beta)>_{\mathrm{s}}|0>_{\mathrm{v}}. \tag{14}$$

以上より、$\widetilde{U}$ は入力のサスセプターを内在する。ここで部分トレースをとればサスセプターを条件とする条件付ユニタリー作用素を得る。

4．量子状態変換のエントロピー[7]

4-1 量子エントロピー

量子エントロピーは次式で定義される事は良く知られている。

$$S = -\,\mathrm{Tr}\,(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) \tag{15}$$

このとき各部分システムは次式で与えられる縮約した密度作用素によって表される。

$$\hat{\rho}_A = \mathrm{Tr}_B(\hat{\rho}) \tag{16a}$$

$$\hat{\rho}_B = \mathrm{Tr}_A(\hat{\rho}) \tag{16b}$$

部分システムA、Bのエントロピーの定義は次の式の様になる。

$$S(\hat{\rho}_A) = -\,\mathrm{Tr}_A(\hat{\rho}_A \ln \hat{\rho}_A) \tag{17a}$$

$$S(\hat{\rho}_B) = -\,\mathrm{Tr}_B(\hat{\rho}_B \ln \hat{\rho}_B) \tag{17b}$$

量子エントロピーは座標系に独立であり、純粋状態の場合には0であり、混合状態では0ではなく値を持つ。また量子通信路における変換過程で、純粋状態を純粋状態に変換する過程の場合には、量子エントロピーを用いるとそれらは0となり、異なる変換過程に対する違いを明らかにすることができない。

4-2 Shannon-Wehrlエントロピー

量子エントロピーでは量子通信路の変換過程での違いを区別できないため、ここで、Shannon-Wehrlエントロピーを用いる。これは座標系に依存する。

$$\tilde{S}(\hat{\rho};\hat{O}) = -\sum_{e} \langle e|\hat{\rho}|e\rangle \ln \langle e|\hat{\rho}|e\rangle \tag{18}$$

$$\hat{O}|e\rangle = e\,|e\rangle \tag{19}$$

ここでboson fieldのShannon-Wehrlエントロピーは

$$\tilde{S}(\hat{\rho};\hat{O}) = -\int d^2\alpha \,\frac{1}{\pi} \langle \alpha|\hat{\rho}|\alpha\rangle \ln \langle \alpha|\hat{\rho}|\alpha\rangle$$

$$= -\int d^2\alpha \, Q(\alpha) \ln Q(\alpha) \tag{20}$$

ただし、$Q(\alpha)$は次式で与えられる。

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} < \alpha \,|\hat{\rho}|\alpha > \tag{21}$$

(20)式は$\hat{\rho}$の状態のQ表現として、よく知られている。このとき部分システムに対するエントロピーは

$$\tilde{S}_1 = - \int d\alpha_1 \, Q_1(\alpha_1) \ln Q_1(\alpha_1) \tag{22a}$$

$$\tilde{S}_2 = - \int d\alpha_2 \, Q_2(\alpha_2) \ln Q_2(\alpha_2) \tag{22b}$$

4-3 スクィズド状態のShannon-Wehrlエントロピー

スクィズド状態のQ関数は次式で記述される。

$$Q(\alpha,\alpha^*) = \frac{1}{\pi \cosh(s)} \exp\left\{ - |\alpha - \alpha_0|^2 + \frac{1}{2}\tanh(s)\left[(\alpha - \alpha_0)^2 + \left(\alpha^* - \alpha_0{}^*\right)^2\right]\right\} \tag{23}$$

対応するShannon-Wehrlエントロピー次の様になる[9]。

$$\begin{aligned} S &= - \int d^2\alpha \, Q(\alpha,\alpha^*) \ln Q(\alpha,\alpha^*) \\ &= 1 + \ln\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \ln\left(e^s + e^{-s}\right) \end{aligned} \tag{24}$$

ここでsはスクィズィングパラメータを表す。

(a) スケーリングスクィズド状態[10]

コヒーレント状態を雑音制御されたスクィズド状態へ変換する際、一般に位相成分、振幅成分を変化させる。そのとき通常では信号は減少してしまう。このような状態はスケーリングスクィズド状態と呼ばれユニタリー過程となる。

ここで、コヒーレント状態($|\alpha>$)からスケーリングスクィズド状態($|\alpha_{sq} ; \mu,\nu>$)への変換過程におけるエントロピー計算を行う。

$|\alpha > \rightarrow |\alpha_{sq} ; \mu,\nu >$

$H(|\alpha >) = S_x + S_y$

$H(|\alpha_{sq} ; \mu,\nu >) = S_x + S_y$

このエントロピー計算結果を図1に示す。

(b) コヒーレントスクィズド状態[10]

前例と同じように、コヒーレント状態($|\alpha>$)からスクィズド状態($|\alpha;\mu,\nu>$)への変換過程におけるエントロピー計算を行う。

$$|\alpha> \to |\alpha;\mu,\nu>$$
$$H(|\alpha>) = S_x + S_y$$
$$H(|\alpha;\mu,\nu>) = S_x + S_y$$

このエントロピー計算を行うとスケーリングスクィズド状態のときと同じ計算結果を得る。

結果が同じになる理由は、エントロピーはスケーリングスクィズド状態およびコヒーレントスクィズド状態の平均値に依存していないために共に同じ結果となる。しかし

コヒーレント状態(s＝0)よりスクィズド状態(s<0, s>0)の方がエントロピーは増大していることが分かる。

5. 大矢－Accardi理論[6,7]

量子通信路を記述する一つの数学理論として大矢－Accardi理論はLiftingの概念を提唱している。ここで簡単にその定義を記す。

入力システム（$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{S}$, α）、出力システムを（$\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{S}}$, $\overline{\alpha}$）としよう。ここで $\mathfrak{S}$ はState spaceと呼ばれる。

定義7. 写像 $\Lambda^*: \mathfrak{S} \to \overline{\mathfrak{S}}$ をチャンネルと定義する。

定義8. チャンネルのあるクラスで次の写像

$$\mathcal{E}^*: \mathfrak{S}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{S}(\mathfrak{A} \otimes \overline{\mathfrak{A}})$$

をLiftingと定義する。

Accardiは幾つかの物理的例をこのLiftingによって記述しているが、まだ我々の条件付ユニタリー過程の基本計算を統合しうるか否かは現段階では解らない。一つの問題は条件付ユニタリー過程は新しい物理現象を含むものであり、物理学自身未完成であるため記述理論としての数学がまだおよばない可能性がある。今後、協力してこの問題に挑戦すべきであろう。

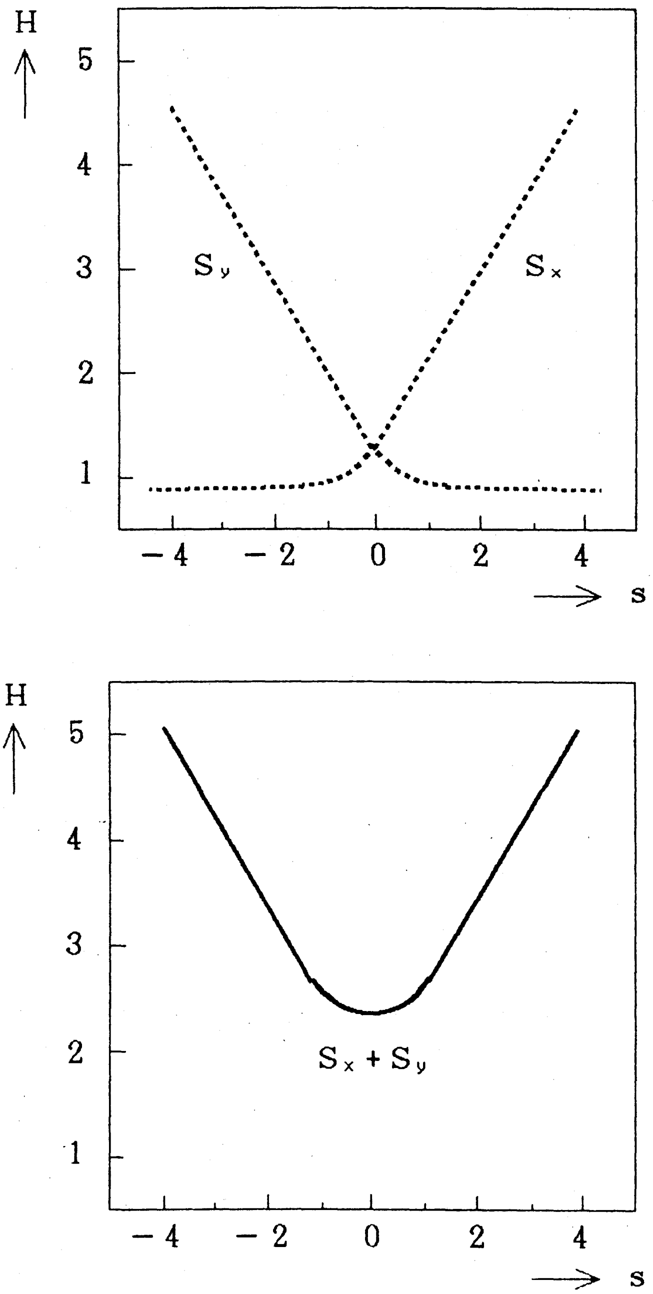
6. まとめ

本報告において条件付ユニタリー過程の基本的概念を示し、一般理論構築への一歩をを与えた。条件付ユニタリー過程の最も単純なモデルは純粋状態　から純粋状態への変換である。この変換の特徴を測るメジャーとしてエントロピーは一つの道具と考えられる。我々は条件付ユニタリー過程によって生成されるコヒーレントスクイズド状態のShannon-Wehrlエントロピーはユニタリー過程によって生成されるスケーリングスクイズド状態のそれと同じである事を示した。現時点で本特性が何を意味するかは明かではないが、今後の指標になるものと思われる。数学的理論を模索するうえで大矢ーAccardi理論は重要な役割を演じるものと信じる。

謝辞：本研究は東レ科学技術研究助成および文部省科研費（一般研究A）助成のもとに行なわれた。

文献

[1] O.Hirota, Phys.Lett. A,155, 1991.
[2] O.Hirota, Optics Commun., 67, 1988.
[3] O.Hirota and H.Tsushima, The Trans. of IEICE Japan, E-72, 1989.
[4] M.Osaki, O.Hirota, and I.Ojima, J. of Modern Optics, 39, 1992.
[5] T.Sasaki and O.Hirota, The Trans. of IEICE Japan, E75, 1992.
[6] M.Ohya, in Quantum aspect of optical communicaions, edited by C.Bendjaballah, O.Hirota, and S.Reynaud, Lecture Notes in Physics, 378, Springer-verlag, 1991.
[7] L.Accardi : in Quantum aspects of Optical Communication, edited by C. Bendjaballah, O.Hirota and S.Reynaud, Springer--Verlag Lecture Notes in Physics 1991.
[8] J. von Neumann : Mathematical foundation of quantum mechanics Princeton University Press,1955.
[9] C.H.Keitel and K.Wodkiewicz, Phys. Lett. A 167, 1992
[10] O.Hirota(ed): Squeezed light, Elsevier, Amsterdom,1992.



s ：スクイズイングパラメータ、H ：エントロピー